Processus de patchs déterminantaux pour la synthèse de texture

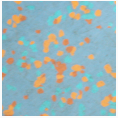
Claire Launay
Travail en collaboration avec Arthur Leclaire (IMB, Université de Bordeaux)

GRETSI 2019 - Lille

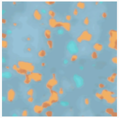
29 Août 2019

Processus de patchs déterminantaux pour la synthèse de texture

- Synthèse de texture par l'exemple : Générer une texture à partir d'un échantillon.



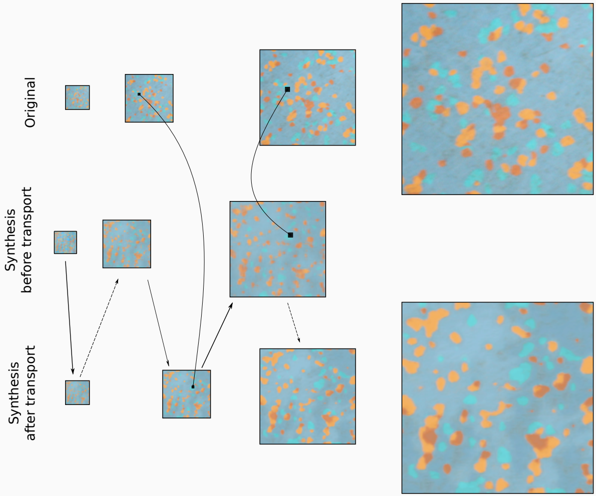
(a) Exemple u



(b) Texture générée

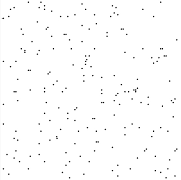
- [Galerne et al., 2018] Méthode de synthèse :
  - Champ gaussien approprié + Transport Optimal (TO) semi-discret.
  - Sous-échantillonnage de la distribution empirique des patchs.
- Proposition : Sous-échantillonnage de l'ensemble des patchs par un processus déterminantal qui tient compte de la structure de l'espace des patchs.

Synthèse de texture par TO semi-discret multi-résolution

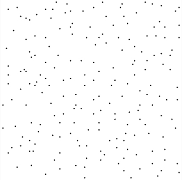


Processus de patchs déterminantaux pour la synthèse de texture

- Les processus ponctuels déterminantaux (DPP) favorisent la **répulsion** :



(a) Uniforme



(b) DPP

- Répulsion entre les points au sens d'une mesure stockée dans le **noyau** K[1] qui peut prendre en compte la structure de l'ensemble des points.
- Ici DPatchP pour approximer la **distribution des patchs** d'une texture.

[1]Kulesza, A. and Taskar, B.,(2012) Determinantal point processes for Machine Learning, Foundations and Trends in Machine Learning.

Synthèse de texture par transport optimal semi-discret

Modèle gaussien associé[2]

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ la texture exemple, définie sur $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$.

Le modèle est basé sur la texture gaussienne U associée à u donnée par

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2,\ U(x) = \bar{u} + \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} t_u(y) W(x-y) \tag{1}$$

où W est un bruit blanc gaussien normalisé sur $\mathbb{Z}^2$ et avec

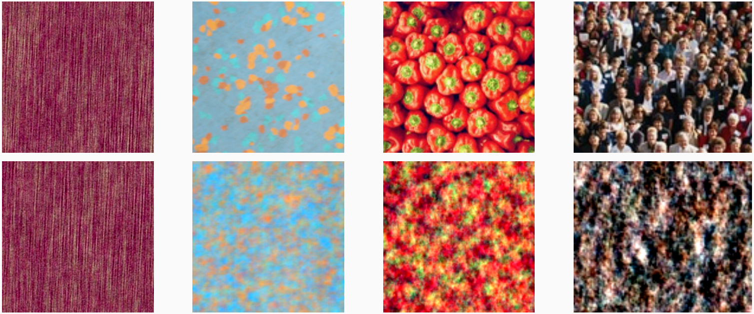
$$\begin{cases} \bar{u} & = \dfrac{1}{|\Omega|} \sum u(x) \\ t_u & = \dfrac{1}{\sqrt{|\Omega|}} (u - \bar{u}) \mathbf{1}_\Omega \end{cases}.$$

[2] Galerne, B., Gousseau, Y., Morel, J.-M., (2011) Random phase textures: Theory and synthesis. IEEE Trans. Image Process.

Modèle gaussien associé : Exemples

Original

Synthèse

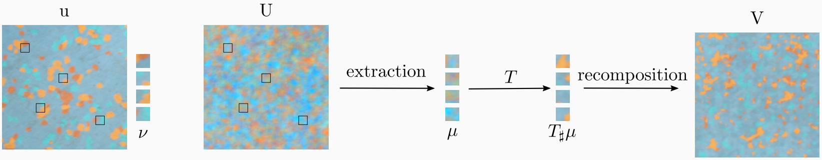


Modèle de transport optimal semi-discret[3]

- Point de départ :
  - patchs (q_j) de la texture originale de distribution discrète $\nu = \sum_{j=1}^{J} \nu_j \delta_{q_j}$
  - patchs de la texture gaussienne de distribution continue μ

  Remarque : Taille des patchs : $w \times w$ et on note $D = dw^2$.
- But : Appliquer une **transformation locale** $T : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ aux patchs de la texture gaussienne pour **réimposer les structures** de la texture originale, d'une façon statistiquement cohérente :

$$T_\sharp \mu = \nu.$$



[3] Galerne, B., Leclaire, A., and Rabin, J. (2018) A texture synthesis model based on semi-discrete optimal transport in patch space. SIAM Journal on Imaging Sciences.

Modèle de transport optimal semi-discret[3]

- On cherche $T : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$, solution du problème

$$\inf \int_{\mathbb{R}^D} \|p - T(p)\|^2 d\mu(p) \tag{2}$$

telle que $T_\sharp \mu = \nu$.

- Solution: **Recherche du plus proche voisin biaisée**

$$T_v(p) = q_{j(p)} \quad \text{avec} \quad j(p) = \underset{j \in \{1,\dots,J\}}{\operatorname{argmin}} \|p - q_j\|^2 - v_j$$

où $v \in \mathbb{R}^J$ est solution d'un problème de maximisation concave et (q_j) les patchs de la texture originale.

Modèle de transport optimal semi-discret[3]

- On cherche $T : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$, solution du problème

$$\inf \int_{\mathbb{R}^D} \|p - T(p)\|^2 d\mu(p) \tag{2}$$

telle que $T_\sharp \mu = \nu$.

- Solution: **Recherche du plus proche voisin biaisée**

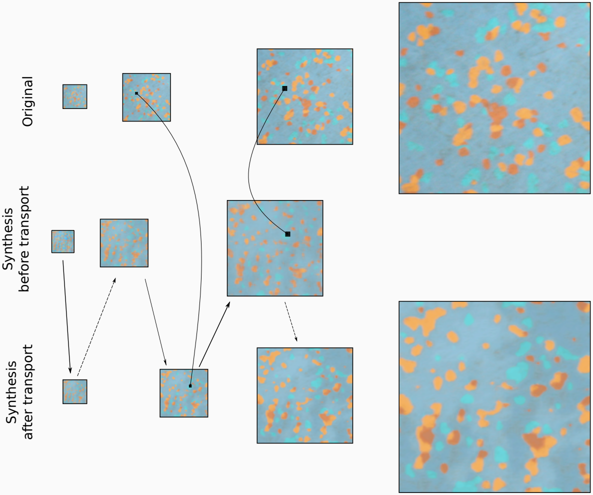
$$T_v(p) = q_{j(p)} \quad \text{avec} \quad j(p) = \underset{j \in \{1,\dots,J\}}{\operatorname{argmin}} \|p - q_j\|^2 - v_j$$

où $v \in \mathbb{R}^J$ est solution d'un problème de maximisation concave et (q_j) les patchs de la texture originale.

- Estimer T : Trouver v grâce à un algorithme de gradient stochastique.
Coûteux : raisonnable seulement pour des patchs 3×3 et J petit.

Modèle multi-échelle[3]

Gérer les structures plus grandes dans la texture originale : procédure multi-échelle.



Synthèse de texture par transport optimal semi-discret[3]

Deux étapes :

- **Estimations** de T^ℓ par l'estimation des poids v^ℓ, à chaque résolution $\ell = L-1, \dots, 0$.
- **Synthèse** de la texture par des recherches de plus proches voisins biaisée successives.

Quelle distribution discrète ν choisir ?

Estimation de la mesure cible grâce aux processus déterminantaux

Choix de la distribution cible ν

Comment choisir la distribution discrète ν des patchs $\{p_i, 1 \leq i \leq I\}$ de la texture exemple ?

- Distribution empirique des patchs

$$\nu_{\mathbf{emp}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \delta_{p_i} \quad \text{mais } I \approx 10^6$$

- Sélection aléatoire uniforme $\{q_j, 1 \leq j \leq J\}$

$$\nu_{\mathbf{unif}} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \delta_{q_j}$$

- Autre sélection aléatoire ?

$$\nu = \sum_{j=1}^{J} \nu_j \delta_{q_j}$$

Processus ponctuels déterminantaux discrets

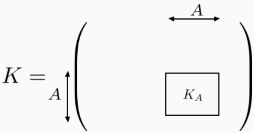
Soit $\mathcal{Y} = \{1, \ldots, I\}$ un ensemble de points (ou d'indices) et K une matrice symétrique de taille $I \times I$ telle que

$$0 \preceq K \preceq 1,$$

alors l'ensemble aléatoire $X \subset \mathcal{Y}$ défini par

$$\forall A \subset \mathcal{Y}, \quad \mathbb{P}(A \subset X) = \det(K_A)$$

est un **processus ponctuel déterminantal** (DPP) de noyau K.
On le notera $X \sim \mathrm{DPP}(K)$.



Processus ponctuels déterminantaux discrets[1]

- *Éléments diagonaux et probabilités marginales*

$$\mathbb{P}(i \in X) = K_{ii}.$$

- *Éléments hors-diagonale et répulsion*

$$A = \{i, j\}, \quad \mathbb{P}(\{i, j\} \subset X) = K_{ii}K_{jj} - |K_{i,j}|^2.$$

- *Cardinal du processus*

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum_{i \in \mathcal{Y}} \lambda_i = \mathrm{Tr}(K)$$

- *L-ensemble*
  Si L est une matrice semi-définie positive alors la matrice $K = L(Id + L)^{-1}$ est le noyau d'un processus ponctuel déterminantal.

Processus de patchs déterminantaux

Choix de noyau pour sous-échantillonner $\{p_i, 1 \leq i \leq I\}$

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, I\}, \quad L_{ij} = \exp\left(-\frac{\|p_i - p_j\|_2^2}{s^2}\right)$$

Remarques :

- L est positive donc $K = L(Id + L)^{-1}$ définit le noyau d'un DPP.
- Échantillonnage coûteux ($\mathcal{O}(I^3)$) mais effectué uniquement pendant l'étape d'estimation du modèle.

Processus de patchs déterminantaux

Choix de noyau pour sous-échantillonner $\{p_i, 1 \leq i \leq I\}$

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, I\}, \quad L_{ij} = \exp\left(-\frac{\|p_i - p_j\|_2^2}{s^2}\right)$$

Remarques :

- L est positive donc $K = L(Id + L)^{-1}$ définit le noyau d'un DPP.
- Échantillonnage coûteux ($\mathcal{O}(I^3)$) mais effectué uniquement pendant l'étape d'estimation du modèle.

Ce DPP détermine le support de ν : $\mathcal{Q} = \{q_j, 1 \leq j \leq J\} \sim \mathrm{DPP}(K)$:

$$\nu = \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{q_j}$$

Déterminer les poids $(\nu_j)_j$

But : ν minimise
$$W_2^2(\nu_{\mathbf{emp}}, \nu) = \inf_{(\pi_{i,j})} \sum_{i,j} \pi_{i,j} \|p_i - q_j\|^2$$

avec $(\pi_{i,j}) \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ tels que

- pour tous i, $\sum_j \pi_{i,j} = \nu_{\mathbf{emp}\, i}$
- pour tous j, $\sum_i \pi_{i,j} = \nu_j$.

Déterminer les poids $(\nu_j)_j$

But : ν minimise

$$W_2^2(\nu_{\mathbf{emp}}, \nu) = \inf_{(\pi_{i,j})} \sum_{i,j} \pi_{i,j} \|p_i - q_j\|^2$$

avec $(\pi_{i,j}) \in \mathbb{R}_+^{I \times J}$ tels que

- pour tous i, $\sum_j \pi_{i,j} = \nu_{\mathbf{emp}i}$
- pour tous j, $\sum_i \pi_{i,j} = \nu_j$.

Problème équivalent :

$$\pi^*_{i,j} = \operatorname*{argmin}_{(\pi_{i,j})} \sum_{i,j} \pi_{i,j} \|p_i - q_j\|^2 \quad \text{tels que } \forall (i,j), \quad \begin{cases} \pi_{i,j} \geq 0 \\ \sum_j \pi_{i,j} = \frac{1}{I} \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{et alors } \forall j \in \{1, \dots, J\},\ \nu^*_j = \sum_i \pi^*_{i,j}. \tag{4}$$

On doit donc résoudre un problème linéaire sur un ensemble convexe : algorithme du simplex par exemple.

Déterminer les poids $(\nu_j)_j$

La distribution des patchs de la texture originale u est estimée par

$$\nu_{\text{DPP}} = \sum_{j=1}^{J} \nu_j^* \delta_{q_j},$$

où (q_j) est une réalisation d'un processus déterminantal de noyau K et les poids (v_j^*) sont donnés par les équations (3, 4).

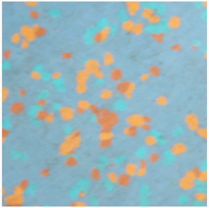
Résultats

- Paramètres utilisés :
  - Patchs de taille 3×3
  - 4 échelles
  - Utilisation de l'algorithme spectral (Décomposition en valeurs propres du noyau)
  - Pré-sélection uniforme de 1000 patchs pour accélérer davantage l'échantillonnage et puisqu'en général $I \approx 10^{\mathbf{6}}$.

- Paramètres utilisés :
  - Patchs de taille 3×3
  - 4 échelles
  - Utilisation de l'algorithme spectral (Décomposition en valeurs propres du noyau)
  - Pré-sélection uniforme de 1000 patchs pour accélérer davantage l'échantillonnage et puisqu'en général $I \approx 10^{\mathbf{6}}$.
- Temps de calcul pendant la synthèse 1024×1024 :

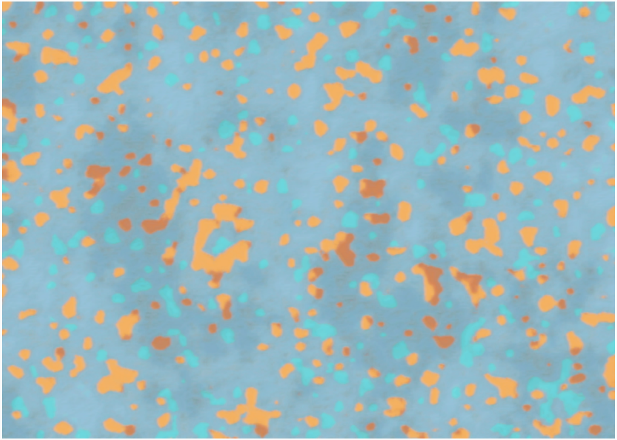
Nb patchs	50	100	200	1000
Temps	0.19"	0.28"	0.47"	1.7"

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



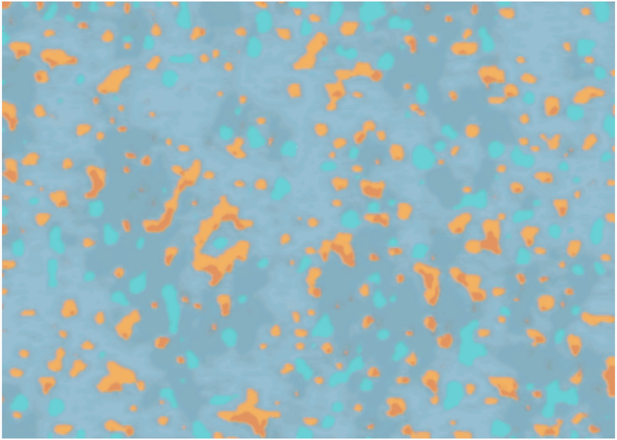
Original

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



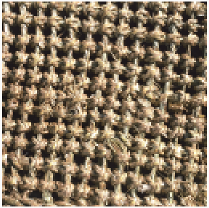
1000 patchs

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



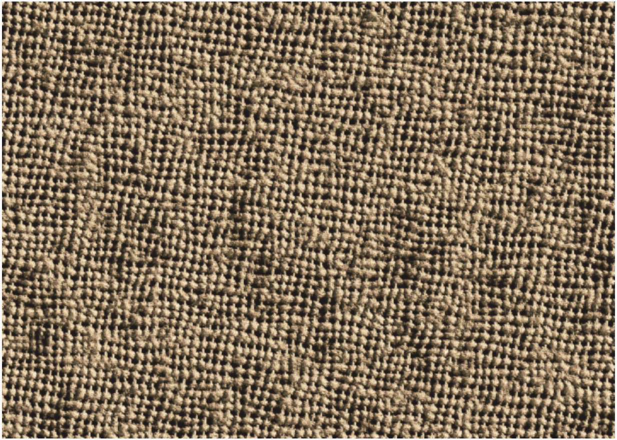
100 patchs par DPP

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



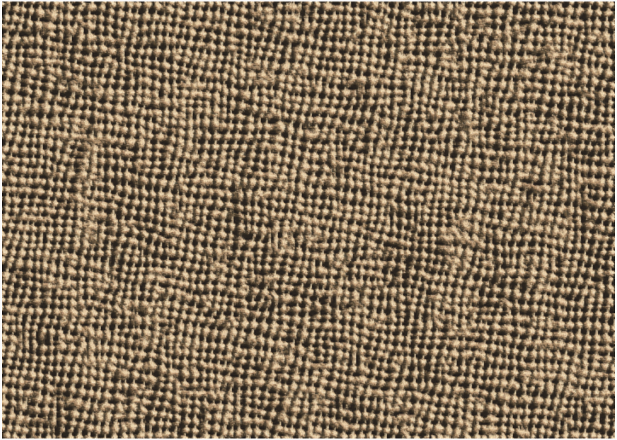
Original

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



1000 patchs

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP

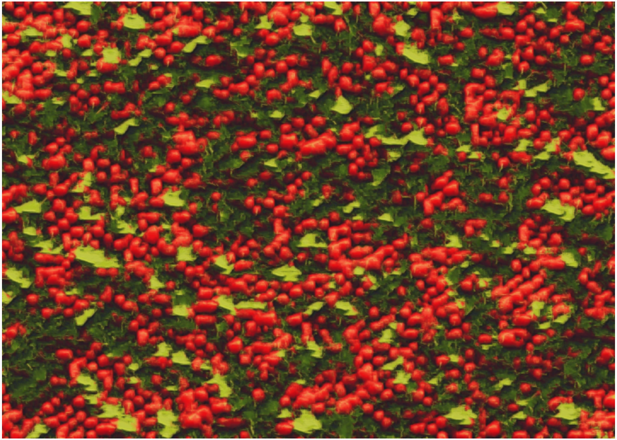


100 patchs par DPP

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP

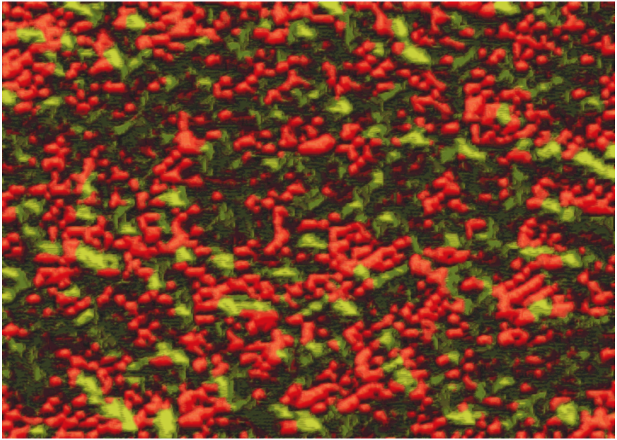
Original

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP



1000 patchs

Comparaisons - 1000 patchs[3] / 100 patchs par DPP

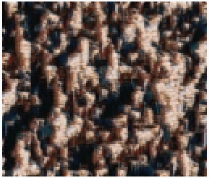


100 patchs par DPP

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

Original

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP



100 patchs - Sélection uniforme

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

100 patchs - DPP

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

Original

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

100 patchs - Sélection uniforme

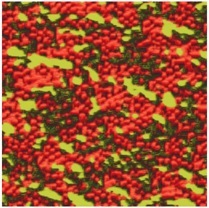
Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

100 patchs - DPP

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

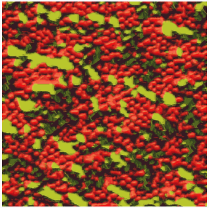
100 patchs - DPP

Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP

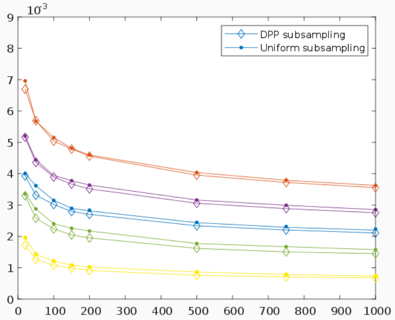


100 patchs - Sélection uniforme

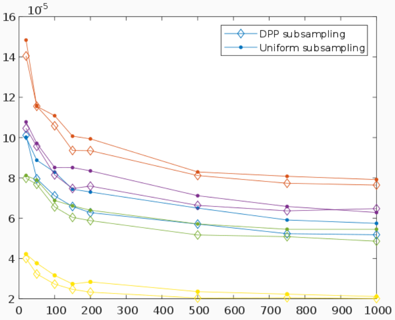
Comparaisons - 100 patchs - Sélection uniforme / DPP



100 patchs - DPP



(a) Distance euclidienne **moyenne** des patchs à une sélection par DPP ou uniforme (5 textures).



(b) Distance euclidienne **maximale** entre l'ensemble des patchs et la sélection par DPP ou uniforme (5 textures).

Conclusion

Conclusion

- Remarques :
  - Proposition d'une alternative pour sous-échantillonner l'ensemble des patchs d'une texture et approximer sa distribution empirique
  - Application à un modèle de synthèse de texture qui utilise le TO semi-discret
  - Accélération significative de la synthèse grâce à un support associé à la distribution des patchs petit
  - Permet un compromis entre qualité visuelle et rapidité de la procédure.

- Perspectives :
  - Adaptation à une résolution multi-couche du problème de TO semi-discret qui permet d'utiliser des patchs 7×7 [4]
  - Développer un critère pour déterminer le nombre de patchs nécessaires selon la complexité de la texture

Les codes sources sont disponibles en ligne

`www.math.u-bordeaux.fr/~aleclaire/texto/`

[4] Leclaire, A. and Rabin, J.,(2019), A Fast Multi-Layer Approximation to Semi-Discrete Optimal Transport, International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision

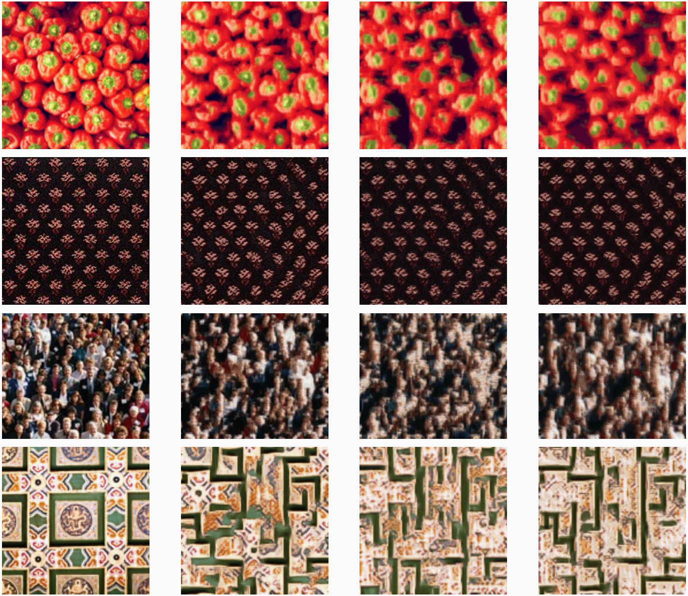
Références :

Galerne, B., Gousseau, Y., and Morel, J.-M. (2011).
Random phase textures: Theory and synthesis.
IEEE Trans. Image Process., 20(1):257 – 267.

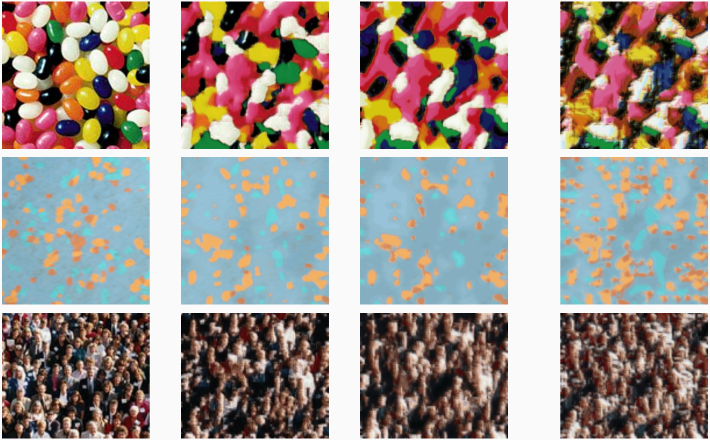
Galerne, B., Leclaire, A., and Rabin, J. (2018).
A texture synthesis model based on semi-discrete optimal transport in patch space.
SIAM Journal on Imaging Sciences, 11(4):2456–2493.

Kulesza, A. and Taskar, B. (2012).
Determinantal point processes for machine learning.
Foundations and Trends in Machine Learning, 5(2-3):123–286.

Ce projet a été supporté par la Région Ile-de-France, l'Institut Henri Poincaré et le LabEx CARMIN.



Original Unif-1000 Unif-100 DPP-100



Original Unif-1000 DPP-100 DPP-100-woweights