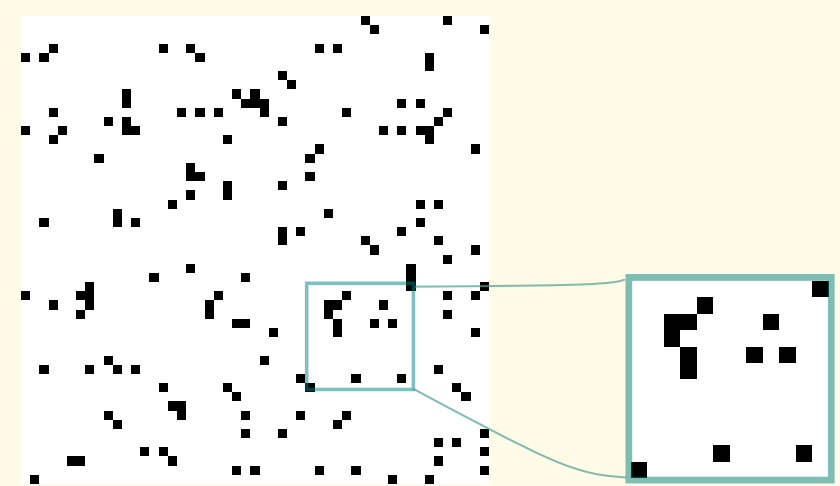
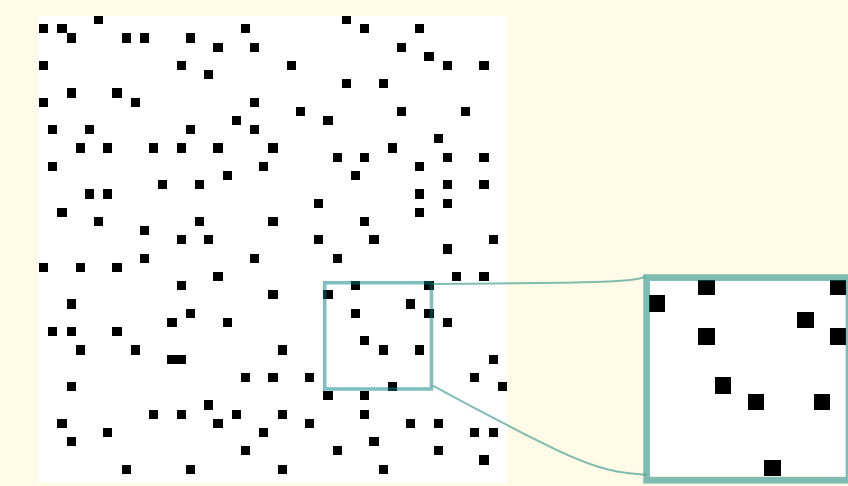


Problématique

Les processus ponctuels déterminantaux modélisent le **caractère répulsif** d'ensembles de points. Nous pensons qu'**adapter ce modèle au cadre des images** permettrait d'obtenir des résultats intéressants, par exemple la synthèse de textures orientées.



a) Réalisation d'un **processus de Bernoulli** : tous les points sont tirés indépendamment, présence d'**agrégats**.



b) Réalisation d'un **processus déterminantal** : probabilité plus grande assignée aux ensembles de **points éloignés** les uns des autres.

Les processus ponctuels déterminantaux (PPD)

Soit Y un ensemble de N points et K une matrice hermitienne définie positive de taille $Y \times Y$. Un processus ponctuel déterminantal X de noyau K est défini sur Y par

$$\mathbb{P}(A \subset X) = \det(K_A),$$

où $K_A = (K(x, y))_{x, y \in A}$ est de taille $|A| \times |A|$.

Un tel processus est bien défini si les **valeurs propres de K sont majorées par 1**.

Par exemple, pour tout $x, y \in Y$,

$$\mathbb{P}(\{x, y\} \subset X) = K(x, x)K(y, y) - |K(x, y)|^2.$$

Plus $K(x, y)$ est grand, plus la probabilité de tirer les deux points simultanément est faible. Si K est une matrice de similarité, les **ensembles de points diversifiés** sont privilégiés (b).

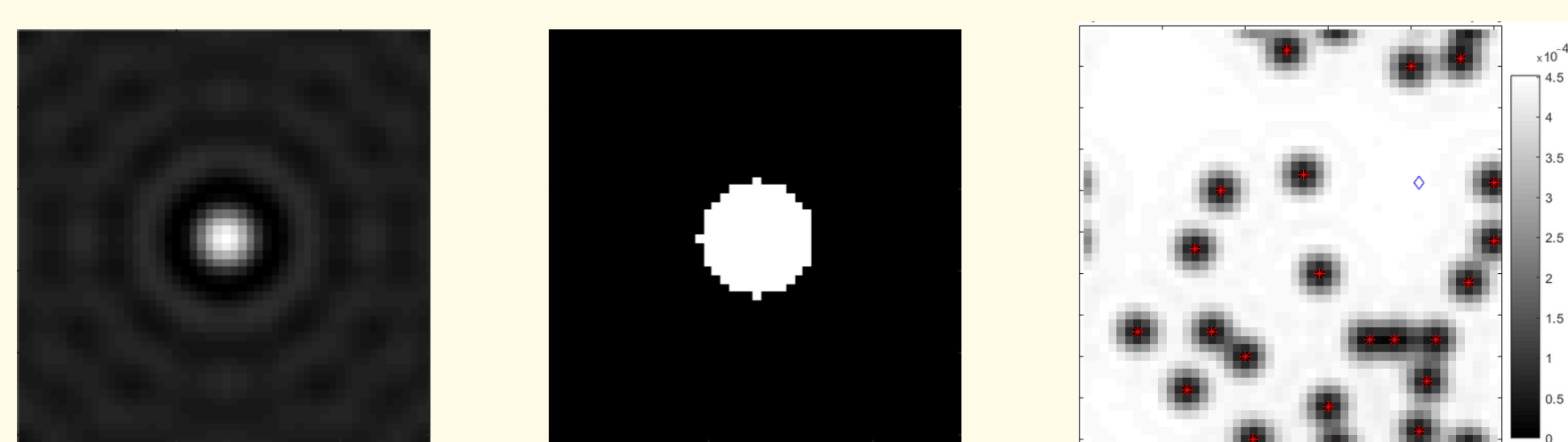
Les processus pixelliques déterminantaux (PPixD)

Adaptation au cadre des pixels d'une image : **processus stationnaires et périodiques définis sur Ω une grille 2D discrète finie**. Le noyau K devient une matrice circulante par blocs, déterminé par une fonction $C : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et diagonalisé par la base de Fourier :

Soit Ω une grille de taille $M \times N$ et une fonction $C : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Le processus pixellique déterminantal X de noyau C est défini par

$$\mathbb{P}(A \subset X) = \det(K_A), \quad \text{où } K_A = (C(x - y))_{x, y \in A}.$$

Dans ce cadre, il faut que $\forall \xi \in \Omega$, $\widehat{C}(\xi)$ soit réel et $0 \leq \widehat{C}(\xi) \leq 1$.



Exemple Partie réelle du noyau C du PPixD (b), coefficients de Fourier de C et capture d'une simulation en cours avec comme échelle de niveau de gris la densité sachant les points déjà tirés.

Avantages des PPixD :

- ▶ Entièrement **déterminé par son noyau C** , donnant la similarité entre les points, moment de tout ordre connu
- ▶ **Echantillonnage exact** par un algorithme séquentiel
- ▶ Zone de répulsion locale donnée par la forme du noyau (Exemple)

Bibliographie

- [1] A. Baddeley, E. Rubak, and R. Turner, Spatial Point Patterns : Methodology and applications with R. Chapman and Hall/ CRC Press, London, 2015
- [2] C. Biscio and F. Lavancier, Quantifying repulsiveness of determinantal point processes. Bernoulli, (to appear), 2016
- [3] B. Galerne, Y. Gousseau, and J.-M. Morel, Random phase textures : Theory and synthesis. IEEE Trans. Image Process., 2011
- [4] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virag. Determinantal processes and independence. Probability surveys, pages 206-229, 2006
- [5] A. Kulesza and B. Taskar. Determinantal point processes for machine learning. Foundations and trends in Machine Learning, 5(2-3):123-286, 2012
- [6] J. J. van Wijk. Spot noise texture synthesis for data visualization. In SIGGRAPH '91, pages 309-318, New York, USA, 1991. ACM

Résultat 1 : Répulsion totale des PPixD

Problème : Les PPixD peuvent-ils, comme les processus de Gibbs, présenter une répulsion totale, c'est-à-dire **une distance minimale imposée** entre les points du processus ?

Etude de la répulsion totale entre deux points

Soit $X \sim \text{PPixD}(C)$ sur Ω et $e \in \Omega$.

La probabilité que x et $x + e$ soient simultanément dans X est nulle \Leftrightarrow les **seules fréquences $\xi \in \Omega$, telles que $\widehat{C}(\xi)$ est non nul, sont sur une droite discrète** d'équation $\langle e, \xi \rangle = \text{constante}$.

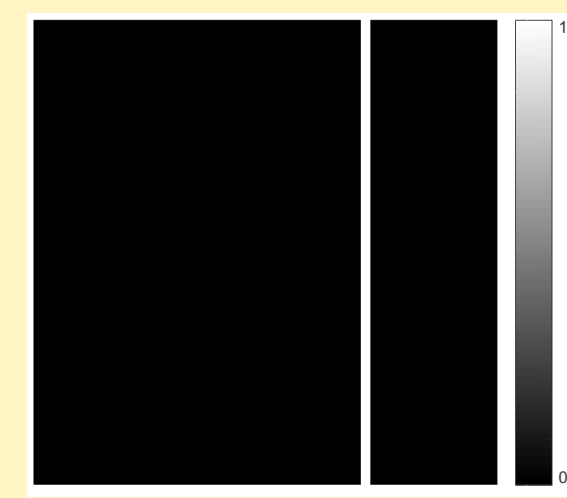
Dans ce cas, X a **presque sûrement au plus un point sur chaque droite de direction e** .

On parle alors de répulsion de direction e .

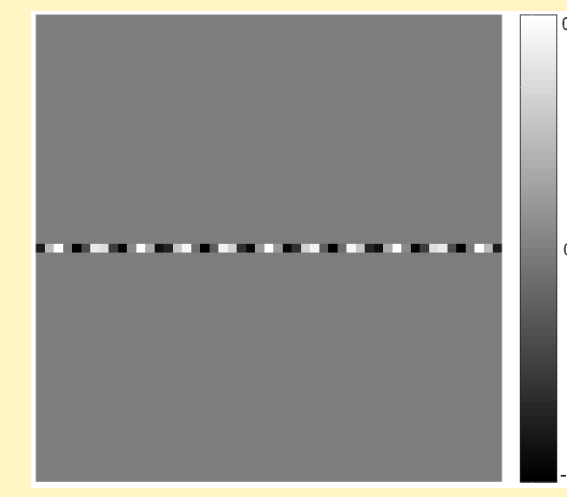
Résultat 1 : Un PPixD présentant une **répulsion totale horizontale**: Les coefficients de Fourier non nuls de son noyau C sont alignés sur une ligne verticale. Ainsi, dès qu'un point est tiré sur une ligne (en rouge dans (c)), la répulsion est totale sur cette ligne : plus aucun point ne peut y être échantillonné.

Conclusion : Imposer une distance minimale entre les points -donc dans toutes les directions- est impossible : on obtient un PPixD dégénéré d'un seul point. La seule répulsion totale possible est directionnelle.

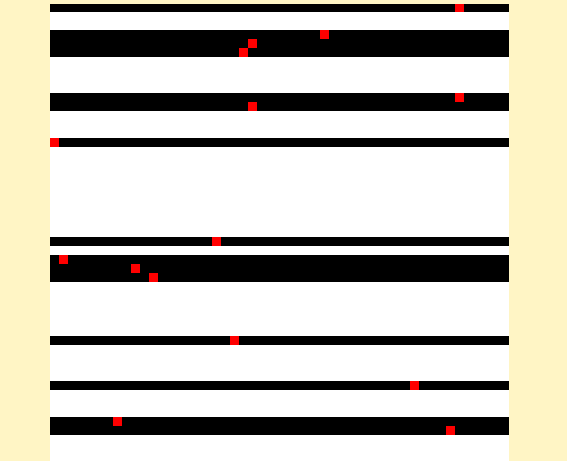
Résultat 1



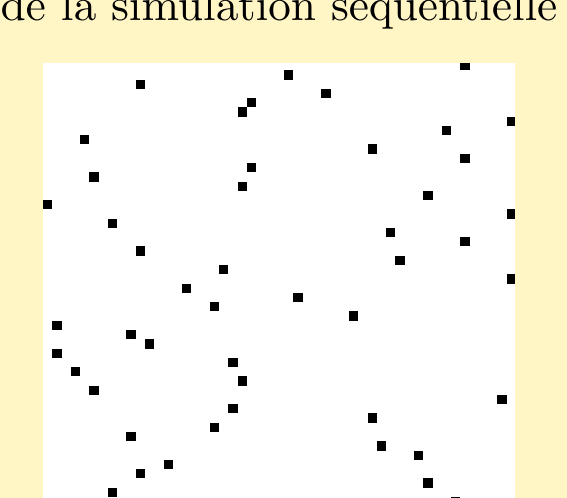
a. Coefficients de Fourier de C



b. Partie réelle de C



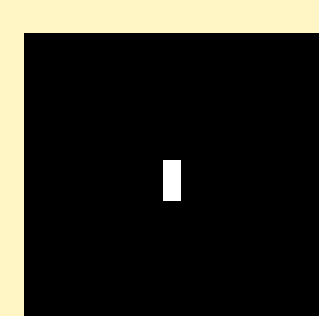
c. Capture de la densité au milieu de la simulation séquentielle



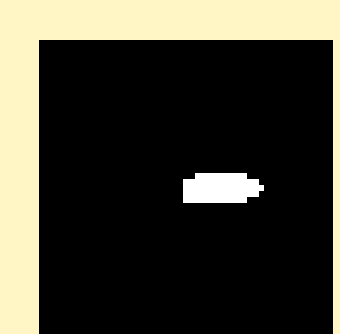
d. Une réalisation du PPixD associé

Résultat 2 : Modèles shot noise basés sur les PPixD

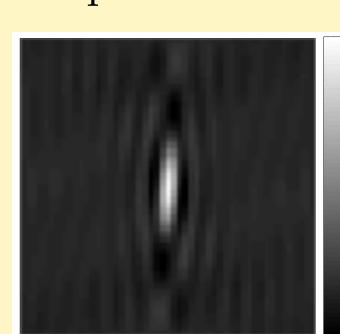
Résultat 2



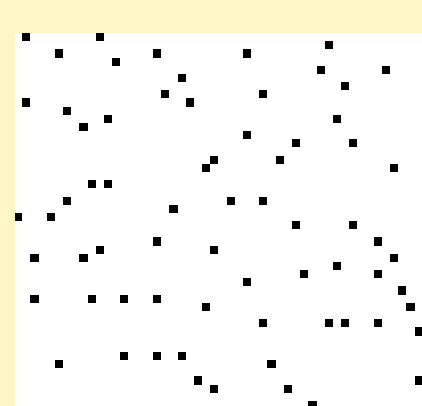
a. La fonction spot



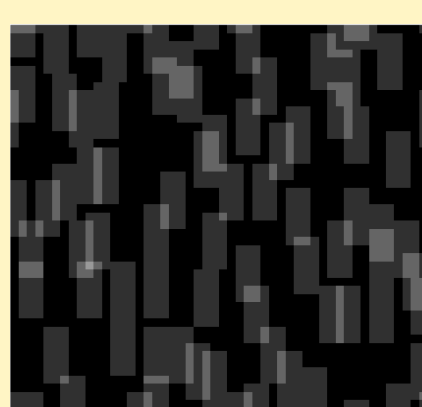
b. Coefficients de Fourier obtenus



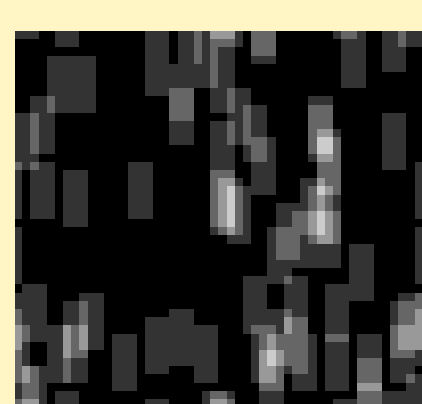
c. Fonction de corrélation C



d. Une réalisation de ce PPixD



e. Shot noise associé



f. Réalisation d'un shot noise poissonnien de même cardinal

Soient C un noyau admissible, $X \sim \text{PPixD}(C)$ et g une fonction définie sur Ω . Alors, le **modèle shot noise S** basé sur X et le spot g est défini $\forall x \in \Omega$ par

$$S(x) = \sum_{x_i \in X} g(x - x_i).$$

Problème : La valeur du shot noise S quantifie la "répulsion au sens de g ", le spot associé, c'est-à-dire la quantité de superpositions des spots g dues au processus : plus S a des valeurs faibles, plus les points du processus sont éloignés au sens de g , et inversement (Résultat 2).

Cas extrêmes de répulsion

▶ **Répulsion minimale** Pour une intensité $m \in \mathbb{N}$ fixée et quelque soit la fonction spot g , le PPixD le moins répulsif est le **processus de Bernoulli** (f).

▶ **Répulsion maximale** Pour une intensité $m \in \mathbb{N}$ et une fonction spot g fixées, le PPixD le plus répulsif au sens de g est le **processus de projection de m points**, processus dont le noyau C n'a que m coefficients de Fourier non nuls dont les fréquences $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ sont localisées pour maximiser

$$\sum_{\xi, \xi' \in \{\xi_1, \dots, \xi_m\}} |\widehat{g}(\xi - \xi')|^2.$$

Résultat 2 : Construction d'un PPixD de répulsion maximale adaptée à la fonction spot (a). Les coefficients de Fourier du noyau sont obtenus par un algorithme glouton. On peut comparer par (e) et (f) deux réalisations de **shot noise basés sur les PPixD de répulsion quasi-maximale et minimale** associés.

Conclusion et projets

- ▶ Ainsi, la seule répulsion totale admise est la répulsion directionnelle. Néanmoins, on peut construire des PPixD de répulsion maximale selon une certaine fonction spot, et donc s'approcher au plus près d'une répulsion totale dans un voisinage.
- ▶ * Recherche de résultats de convergence pour les PPixD.
- ▶ * Amélioration de l'algorithme de simulation des PPixD les plus répulsifs pour une certaine fonction spot.
- ▶ * Application des résultats à la synthèse de texture et à l'échantillonnage.