

# Modélisation de Textures : Champs Gaussiens Autosimilaires et Signal Monogène

Hermine BIERMÉ<sup>1</sup> Philippe CARRÉ<sup>2</sup> Céline LACAUX<sup>3</sup> Claire LAUNAY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IDP, UMR CNRS 7013, Université de Tours, Parc Grandmont, 37200 Tours, France

<sup>2</sup>XLIM UMR CNRS 7252, Université de Poitiers, 11 Bd Marie et Pierre Curie, 86360 Futuroscope Chasseneuil, France

<sup>3</sup>Avignon Université, LMA, UPR 2151, 84000 Avignon, France

**Résumé** – On s’intéresse à la représentation de champs gaussiens autosimilaires anisotropes par ondelettes monogènes. Le signal monogène utilise la transformée de Riesz et permet d’extraire des informations locales d’orientation et de structure d’une image. L’analyse multi-échelle développée ici permet d’obtenir des estimateurs non biaisés et fortement consistants des paramètres d’anisotropie et d’autosimilarité de textures gaussiennes particulières.

**Abstract** – We study the representation of self-similar anisotropic Gaussian fields by monogenic wavelets. The monogenic signal uses the Riesz transform and allows to extract local orientation and structure information from an image. The multiscale analysis presented here provides unbiased and consistent estimators of the anisotropy and autosimilarity parameters of specific Gaussian textures.

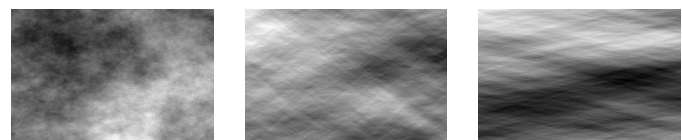
## 1 Introduction

L’autosimilarité caractérise un objet qui conserve les mêmes propriétés à différentes échelles. Cette notion est particulièrement adaptée à l’analyse de micro-textures, qui ne présentent pas de structure ou de motif géométrique, et sont généralement modélisées par un champ aléatoire gaussien. En imagerie médicale par exemple, modéliser une texture obtenue par mammographie par un champ aléatoire autosimilaire, et étudier son ordre d’autosimilarité, permet de faire la différence entre un tissu mammaire dense ou grasseux. Nous nous intéressons ici aux champs aléatoires autosimilaires anisotropes, à accroissements stationnaires, dont les propriétés peuvent être analysées à partir de leur densité spectrale.

Pour analyser ces champs aléatoires, nous proposons d’utiliser le signal monogène défini à partir de la transformée de Riesz. La transformée de Riesz [2], analogue de la transformée de Hilbert en dimension 2, se comporte de manière très similaire à l’opérateur de gradient. L’étude du signal monogène peut fournir une estimation de la directionnalité [4] ou du degré d’anisotropie [5] d’un champ gaussien anisotrope. Dans la continuité de [5], nous proposons une analyse basée sur les ondelettes monogènes [6] pour estimer le paramètre d’autosimilarité et le degré d’anisotropie d’un cas particulier de ces champs : les champs élémentaires. Les paramètres issus de la transformée en ondelettes monogènes permettent de caractériser finement ce type de processus. Nous étudions théoriquement et numériquement les performances statistiques des estimateurs obtenus.

## 2 Champs gaussiens autosimilaires anisotropes

L’un des exemples les plus étudiés de champs aléatoires gaussiens autosimilaires à accroissements stationnaires est le



a)  $\delta = \pi/2$       b)  $\delta = \pi/3$       c)  $\delta = \pi/6$

FIGURE 1 : Réalisations de champs élémentaires pour plusieurs valeurs  $\delta$  et pour  $H = 0,5$ .

champ brownien fractionnaire  $B_H$  de paramètre de Hurst  $H \in (0, 1)$ . Ce champ aléatoire est isotrope et plus le paramètre de Hurst est proche de 0, plus la texture créée est rugueuse, irrégulière. Au contraire, plus  $H$  s’approche de 1, plus la texture paraît lisse. Pour modéliser des textures invariantes par changement d’échelle mais dont les propriétés changent selon la direction observée, on peut définir des champs aléatoires autosimilaires anisotropes. Soit  $H \in (0, 1)$  et une densité spectrale  $f(\xi) = t(\xi/|\xi|)|\xi|^{-2H-2}$ , où  $t \in L^1(S^1)$  est une fonction définie sur la sphère unité, paire et positive, telle que  $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \min(1, |\xi|^2)d\xi)$ . On peut définir un champ aléatoire gaussien dont la représentation harmonisable est donnée pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , par  $X(x) := \mathcal{R} \left( \int [e^{-ix \cdot \xi} - 1] \sqrt{f(\xi)} W(d\xi) \right)$ , où  $W$  est une mesure brownienne complexe isotrope. Alors le champ aléatoire  $X$  associé à  $f$  est autosimilaire d’ordre  $H$ , c’est-à-dire  $\{X(\lambda x); x \in \mathbb{R}^2\} \stackrel{d}{=} \lambda^H \{X(x); x \in \mathbb{R}^2\}$ . Par la suite, on considérera le cas d’un champ élémentaire [1]. Soit  $\delta \in (0, \pi/2]$ , sa densité spectrale est définie grâce à la fonction  $t_\delta(\Theta(\alpha)) = \mathbf{1}_{|\alpha| \leq \delta}$ , où  $\Theta(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in S^1$  et  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ . Lorsque  $\delta = \pi/2$ , le champ élémentaire est le champ brownien fractionnaire isotrope. La Figure 1 présente trois exemples de champs aléatoires élémentaires pour  $H = 0,5$  fixé et différentes valeurs  $\delta$ . Plus  $\delta$  s’approche de 0, plus la texture paraît orientée horizontalement. Ces champs élémentaires peuvent être simulés par la méthode des bandes tournantes [1].

Pour une fonction  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et un champ aléatoire de densité spectrale  $f$  donnée, on peut définir l’opération  $\langle X, u \rangle :=$

$\mathcal{R}\left(\int \widehat{u}(\xi)\sqrt{f(\xi)}W(d\xi)\right)$ , dès que  $|\widehat{u}(\xi)| \leq C \min(1, |\xi|)$  puisqu'alors  $\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 f(\xi) d\xi < +\infty$ . On considère également la classe de Schwartz  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$  qui désigne les fonctions  $u$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  d'intégrale nulle.

### 3 Signal monogène d'un champ aléatoire

#### 3.1 Signal Monogène

Le point de départ de la transformée exposée ici est l'extension du signal analytique aux images. Il existe une manière de généraliser la notion de signal analytique 1D pour les images, à savoir le signal monogène [2], à partir d'une généralisation de la transformée de Hilbert appelée la transformée de Riesz. Soit un signal  $s \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , les transformées de Riesz peuvent être définies de la manière suivante, pour  $k = 1, 2$

$$\mathcal{R}_k(s)(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{x_k - y_k}{|x - y|^3} s(y) dy. \quad (1)$$

On a alors  $\widehat{\mathcal{R}_k(s)}(\xi) = -i \frac{\xi_k}{|\xi|} \widehat{s}(\xi)$  pour  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Le signal monogène associé  $s_M(x)$  est un signal vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  et peut aussi être caractérisé par ses coordonnées sphériques :

$$s_M(x) = \begin{bmatrix} s(x) \\ \mathcal{R}_1(s)(x) \\ \mathcal{R}_2(s)(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) \cos \varphi(x) \\ A(x) \sin \varphi(x) \cos \theta(x) \\ A(x) \sin \varphi(x) \sin \theta(x) \end{bmatrix},$$

avec  $A(x) \in \mathbb{R}^+$  l'amplitude du signal monogène,  $\varphi(x) \in (-\pi, \pi]$  sa phase et  $\theta(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  son orientation.

L'intérêt principal du signal monogène vient du lien fort existant entre les valeurs de la phase  $\varphi$  et la structure géométrique des formes locales du signal. De plus, l'enveloppe d'amplitude  $A$  est invariante par translation et rotation.

#### 3.2 Analyse multi-échelle

De nombreux développements autour des ondelettes monogènes ont permis une analyse plus fine de la géométrie des images en niveau de gris. La transformée de Riesz multi-échelle est naturellement calculée avec un banc de filtres isotropes. Dans ce papier, nous proposons d'utiliser une construction avec un banc de filtres non décimés, c'est-à-dire que l'image filtrée garde la même taille que l'image d'origine. L'image source  $I(x) = I_0(x)$  est codée à travers le résidu passe-bas  $I_L(x)$  et  $L$  sous-bandes  $(s_j)_{1 \leq j \leq L}$ , ainsi que  $L$  échelles de la transformée de Riesz multi-échelle  $(\mathcal{R}s_j)_{1 \leq j \leq L}$ .

Nous proposons les définitions suivantes, précédemment utilisées pour caractériser des images couleurs [6], pour les filtres passe-bas  $\widehat{H}_j$  et passe-haut  $\widehat{G}_j$  permettant la décomposition :

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1(\xi) &= 1 - e^{-|\xi|^2/2}, \\ \widehat{G}_j(\xi) &= \widehat{G}_1(2^{j-1}\xi), \quad \widehat{H}_j(\xi) = \sqrt{1 - \widehat{G}_j(\xi)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

On remarque que l'on a  $\widehat{G}_1(0) = 0$  et  $|\widehat{G}_1(\xi)| \leq C \min(1, |\xi|^2)$  pour  $C$  une constante. Une telle définition multi-échelle a l'avantage d'être simple. Le banc de filtres est normalisé à chaque échelle et calculé dans le domaine de Fourier.

Dans la suite de cette étude, on considèrera la fonction  $u$  définie à partir du noyau  $G_1$  tronqué, tel qu'on ait  $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$ .

De plus, à chaque échelle, on considèrera  $x \mapsto u_j(x) = 2^{-j}u(2^{-j}x)$ , le filtre à l'échelle  $j$ , et  $\tau_x u_j$ , la translation de  $u_j$  en  $x$ , utilisée pour évaluer le champ aléatoire en  $x$ .

### 3.3 Représentation monogène d'un champ élémentaire

Pour un champ aléatoire gaussien  $X$ , le signal monogène est un champ aléatoire généralisé à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  que l'on définit pour une fonction  $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$  comme  $MX(u) = \langle X, u \rangle_M = (\langle X, u \rangle, \mathcal{R}_X(u))$  où  $\mathcal{R}_X(u) = (\langle \mathcal{R}_1 X, u \rangle, \langle \mathcal{R}_2 X, u \rangle)$ . Il est gaussien, de fonction de covariance (vectorielle)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{MX}(u, v) &:= \mathbb{E}(MX(u)MX(v)^*) \\ &= \Re \int \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\xi_1}{|\xi|} & i \frac{\xi_2}{|\xi|} \\ -i \frac{\xi_1}{|\xi|} & \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} & \frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} \\ -i \frac{\xi_2}{|\xi|} & \frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi|^2} & \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} \end{pmatrix} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $MX(v)^*$  désigne le vecteur transposé conjugué de  $MX(v)$ . En particulier, dans le cas d'un champ élémentaire, on a la proposition suivante.

**Proposition 1.** Soit  $(\delta, H) \in (0, \pi/2] \times (0, 1)$  et  $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$  une fonction radiale. Si  $X$  est un champ élémentaire de densité spectrale  $f_X(\xi) = t_\delta(\xi/|\xi|)|\xi|^{-2H-2}$  alors  $(MX(\tau_x u))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  est un champ stationnaire gaussien centré tel que pour chaque  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$MX(\tau_x u) \stackrel{d}{=} \sqrt{c_X(u)} D_\delta Z,$$

où  $c_X(u) = \text{Var}(\langle X, u \rangle) = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 f(\xi) d\xi$ ,  $D_\delta = \text{diag}\left(1, \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\delta)}{4\delta}}, \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin(2\delta)}{4\delta}}\right)$  est une matrice diagonale et  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_3)$ . De plus, pour une échelle  $j$  donnée,

$$(MX(\tau_x u_j))_{x \in \mathbb{Z}^2} \stackrel{d}{=} 2^{j(H+1)} (MX(\tau_x u))_{x \in \mathbb{Z}^2}.$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que la fonction de covariance de  $(MX(\tau_x u))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  est donnée par  $\mathcal{C}_{MX}(\tau_x u, \tau_y u) = \mathcal{C}_{MX}(\tau_{x-y} u, u)$ . En utilisant le fait que  $|\widehat{u}|^2 f$  est réelle on obtient l'indépendance de  $\langle X, u \rangle$  et  $\mathcal{R}_X(u)$ . On retrouve par le calcul que  $\mathcal{C}_{MX}(\tau_x u_j, \tau_y u_j) = 2^{j(2H+2)} \mathcal{C}_{MX}(\tau_x u, \tau_y u)$ .  $\square$

Par la suite, on considère une texture donnée comme la réalisation d'un champ gaussien élémentaire et on cherche à estimer les paramètres d'anisotropie et d'autosimilarité de ce champ. On suppose que cette texture est définie sur la grille de pixels  $G = \{x \in \{1, \dots, N\}^2\}$ . L'analyse du signal monogène nous permet d'obtenir des estimateurs par deux stratégies différentes : la première méthode s'ajoute aux travaux de [5] et est basée sur le tenseur de structure du signal monogène, la seconde méthode utilise le signal monogène lui-même.

## 4 Inférence via le tenseur de structure

### 4.1 Tenseur de structure de Riesz

Olhede et al. [4] puis Polissano et al. [5] proposent d'utiliser le tenseur de structure de Riesz pour détecter la directionnalité et l'anisotropie de champs aléatoires, et qu'on peut définir pour toute échelle  $j$  comme

$$J_X(u_j) := \mathbb{E}(\mathcal{R}X(u_j)\mathcal{R}X(u_j)^*).$$

Soit  $\lambda^+(u_j)$  la plus grande valeur propre de  $J_X(u_j)$  et  $\lambda^-(u_j)$  sa plus petite valeur propre. Alors l'indice de cohérence, donné par

$$\chi_X(u_j) = \frac{\lambda^+(u_j) - \lambda^-(u_j)}{\lambda^+(u_j) + \lambda^-(u_j)} \in [0, 1], \quad (5)$$

permet de mesurer l'anisotropie directionnelle. Lorsqu'on considère  $X$  un champ élémentaire de paramètres  $(\delta, H)$ , on a  $J_X(u_j) = c_X(u_j) \times \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \Theta(\alpha)\Theta(\alpha)^* d\alpha$ . On peut montrer [5] qu'on obtient alors  $\lambda^\pm(u_j) = c_X(u_j) \times \left[ \frac{1}{2} \pm \frac{\sin(2\delta)}{4\delta} \right]$  et

$$\lambda^\pm(u_j) = 2^{j(2H+2)} \lambda^\pm(u). \quad (6)$$

Par ailleurs, on peut remarquer que l'indice de cohérence du tenseur de structure à l'échelle  $j$  ne dépend pas de l'échelle considérée :  $\chi_X(u_j) = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}$ .

## 4.2 Estimation multi-échelle des paramètres d'un champ élémentaire

A partir d'une réalisation d'un champ élémentaire défini sur la grille  $G$  de taille  $N \times N$ , il est possible d'obtenir, à chaque échelle, un estimateur empirique du tenseur de structure donné par

$$J_j^{\text{emp}} = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in G} \mathcal{R}X(\tau_x u_j) \mathcal{R}X(\tau_x u_j)^*. \quad (7)$$

Après une décomposition spectrale, on note  $\lambda_j^{+\text{emp}}$  la plus grande valeur propre de la matrice obtenue et  $\lambda_j^{-\text{emp}}$  la plus petite. On obtient alors la proposition suivante.

**Proposition 2.**  $J_j^{\text{emp}}$  est un estimateur sans biais et

$$J_j^{\text{emp}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} J_X(u_j). \quad (8)$$

$$\text{De même, } \lambda_j^{\pm\text{emp}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda_j^\pm.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 1,  $(MX(\tau_x u_j))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  est un champ stationnaire, et donc  $(\mathcal{R}X(\tau_x u_j))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  aussi d'où  $\mathbb{E}(J_j^{\text{emp}}) = J_X(u_j)$ . De plus, d'après le théorème ergodique de Birkhoff, la convergence p.s. est assurée par la convergence en moyenne quadratique. Celle-ci s'obtient en remarquant que  $\hat{u}f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  dès que  $u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$ . On en déduit que p.s. la suite de fonctions  $\theta \mapsto \langle \theta, J_j^{\text{emp}} \theta \rangle$  converge uniformément sur  $S^1$  vers la fonction  $\theta \mapsto \langle \theta, J_X(u_j) \theta \rangle$ , et alors  $\lambda_j^{-\text{emp}} = \min_{\theta \in S^1} \langle \theta, J_j^{\text{emp}} \theta \rangle \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \langle \theta, J_X(u_j) \theta \rangle = \lambda_j^-$ . On a le même résultat pour  $\lambda_j^{+\text{emp}}$  et le maximum.  $\square$

**Indice de cohérence** On considère donc l'estimateur de l'indice de cohérence, pour une échelle  $j$  choisie, défini par

$$\chi_X(u_j) = \frac{\lambda_j^{+\text{emp}} - \lambda_j^{-\text{emp}}}{\lambda_j^{+\text{emp}} + \lambda_j^{-\text{emp}}}, \quad (9)$$

où  $\lambda_j^{\pm\text{emp}}$  est la valeur propre obtenue à l'échelle  $j$  à partir d'une réalisation du champ aléatoire  $X$ . La Figure 2 présente les résultats de l'estimation de l'indice de cohérence à partir de textures générées par des champs élémentaires avec différents paramètres. La Figure 2a) compare l'estimation de l'indice de cohérence, effectuée indépendamment à chaque échelle, pour  $H = 0, 5$  fixé et différents degrés d'anisotropie, à partir de 1000 réalisations d'un même champ élémentaire. L'indice de cohérence cible pour chaque degré d'anisotropie est affiché en

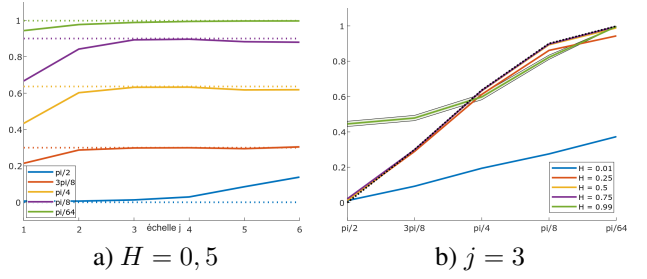


FIGURE 2 : Estimation de l'indice de cohérence, avec 1000 réalisations, en fonction a) de l'échelle de représentation monogène pour  $H$  fixé et b) du degré d'anisotropie.

pointillé. On remarque que si la première échelle ne permet pas une estimation correcte de  $\chi_X$ , les estimations aux échelles suivantes sont très satisfaisantes, à l'exception du cas isotrope pour les deux dernières échelles. La difficulté de la première échelle à fournir une bonne estimation provient probablement du fait que dans le domaine fréquentiel, la texture a une faible énergie à cette échelle, rendant l'estimation instable. La Figure 2b) présente l'estimation obtenue à l'échelle  $j = 3$  de l'indice de cohérence pour différents degrés d'anisotropie (en abscisse) et différents paramètres de Hurst (couleur). Lorsque  $H$  est éloigné de 0 ou 1, l'estimateur de  $\chi_X$  est très efficace, quelque soit le degré d'anisotropie. Dans le cas élémentaire, l'indice de cohérence est défini comme le sinus cardinal du degré d'anisotropie (multiplié par 2). Une bonne estimation de l'indice de cohérence nous permet donc d'estimer  $\delta$  le degré d'anisotropie, en inversant la fonction sinus cardinal, bijective sur  $[0, \pi]$ .

**Paramètre de Hurst** D'après l'équation (6), la pente de la courbe  $(j, \log(\lambda_j^\pm))$  est donnée par  $(2H+2) \log(2)$ . Cela fournit un estimateur du paramètre de Hurst,  $H^{\text{emp}}$ , obtenu grâce à une régression linéaire à partir des valeurs propres du tenseur de structure à chaque échelle. La Figure 3a) montre les valeurs propres de l'estimateur  $J_j^{\text{emp}}$  obtenues à chaque échelle  $j$  pour un champ élémentaire de paramètres  $H = 0, 5$  et  $\delta = \pi/4$ . La Figure 3b) représente les différents estimateurs de  $H$  obtenus pour des champs élémentaires de degré d'anisotropie et d'ordre d'autosimilarité différents. On s'est restreint aux valeurs de  $H \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  puisque lorsque  $H$  est trop proche de 0 le champ est dégénéré et certaines propriétés de convergence de champs similaires ne sont vérifiées que pour  $H \leq \frac{3}{4}$ . Comme pour l'estimation de l'indice de cohérence, la qualité de l'estimation dépend tout particulièrement de la valeur de  $H$ , quelque soit le degré d'anisotropie. Par ailleurs, lorsque  $\delta$  est proche de 0, l'estimation de  $H$  échoue.

## 5 Inférence basée sur le signal monogène

### 5.1 Loi des coordonnées sphériques de $MX(u)$

On considère à présent le signal monogène d'un champ aléatoire complet, que l'on écrit à partir de ses coordonnées sphériques comme  $MX(u) = A(u)(\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u)) \cos(\theta(u)), \sin(\varphi(u)) \sin(\theta(u)))$ , pour un filtre  $u$ . On considère donc  $A(u) = |MX(u)|$ , l'amplitude,  $\varphi(u) \in (-\pi, \pi]$ , la phase  $2\pi$ -périodique et  $\theta(u) \in (-\pi/2, \pi/2]$ , l'orientation  $\pi$ -périodique. Lorsque le champ aléatoire  $X$  est un champ élémentaire, il est possible

de calculer explicitement les densités de ses paramètres.

**Proposition 3.** •  $(A(\tau_x u), \theta(\tau_x u), \varphi(\tau_x u))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  est un champ stationnaire.

• **Loi de l'orientation :**  $\theta(u)$  est indépendante de  $(A(u), \varphi(u))$  et suit une distribution normale "décalée" ou offset normal distribution de densité la fonction  $\pi$ -périodique

$$t \mapsto \frac{\sqrt{1 - \chi_X(u)^2}}{\pi(1 - \chi_X(u) \cos(2t))},$$

où  $\chi_X(u) \in [0, 1)$  est l'indice de cohérence.

• **Amplitude du signal :**  $A(u_j)^2 = \langle X, u_j \rangle^2 + |\mathcal{R}X(u_j)|^2$  et  $A(u_j)^2 \stackrel{d}{=} c_X(u_j)A^2$ , où  $A^2 = |D_\delta Z|^2$  pour  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_3)$  et  $D_\delta$  introduite dans la proposition 1.

• **Cas isotrope :** dans le cas isotrope, où  $\delta = \pi/2$ ,  $\theta(u)$  est uniforme sur  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  et la phase  $\varphi(u)$  a pour densité

$$\phi \mapsto \frac{|\sin(\phi)|}{2(1 + \sin(\phi)^2)^{3/2}} \mathbf{1}_{(-\pi/2, \pi/2)}(\phi).$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{R}_1 X(u)$  et  $\mathcal{R}_2 X(u)$  sont des variables gaussiennes centrées indépendantes, la densité de  $\theta(u)$  est donnée par  $\theta \mapsto \frac{\sqrt{1-b^2}}{\pi(1-b \cos(2\theta))}$  d'après [3], avec  $b = \frac{\text{Var}(\mathcal{R}_1 X(u)) - \text{Var}(\mathcal{R}_2 X(u))}{\text{Var}(\mathcal{R}_1 X(u)) + \text{Var}(\mathcal{R}_2 X(u))} = \chi_X(u)$  par la proposition 1. Si  $\delta = \pi/2$ , on a  $\chi_X(u) = 0$  donc  $\theta(u)$  est uniforme et indépendante de  $(A(u), \varphi(u)) \stackrel{d}{=} (\sqrt{c_X(u)}A, \varphi)$  où  $(A, \varphi)$  ont la densité jointe  $(a, \phi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2(1+\sin^2(\phi))} a^2 |\sin(\phi)| \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(a) \mathbf{1}_{(-\pi, \pi)}(\phi)$ . En intégrant par rapport à  $a$ , on obtient la densité voulue.  $\square$

## 5.2 Estimation de l'indice de Hurst

L'information donnée par l'amplitude du signal monogène à différentes échelles permet d'obtenir un estimateur du paramètre de Hurst du champ élémentaire puisque  $\mathbb{E}(|MX(u_j)|^2) = \mathbb{E}(A(u_j)^2) = c_X(u_j)\mathbb{E}(A^2)$ , où  $c_X(u_j) = 2^{j(2H+2)}c_X(u)$ . On peut à nouveau en déduire la forte consistance suivante.

**Proposition 4.** L'estimateur  $V_j^{\text{emp}} = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in G} |MX(\tau_x u_j)|^2$  est sans biais et

$$V_j^{\text{emp}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(|MX(u_j)|^2). \quad (10)$$

*Démonstration.* Par stationarité du champ  $(MX(\tau_x u_j))_{x \in \mathbb{Z}^2}$  on obtient un biais nul et la convergence forte pour l'estimateur  $V_j^{\text{emp}}$  s'obtient comme dans la proposition 2.  $\square$

Ces résultats nous permettent donc de définir une estimation de l'indice de Hurst en calculant la pente de la courbe donnée par  $j \mapsto V_j^{\text{emp}}$ . Ces estimations sont présentées par la Figure 3. La Figure (c) montre une estimation de l'amplitude du signal monogène d'un champ élémentaire de paramètres  $\delta = \pi/4$  et  $H = 0, 5$  à chaque échelle de la représentation en ondelettes monogènes du champ. Les estimateurs de l'indice de Hurst que l'on obtient à partir de 100 réalisations d'un champ élémentaire sont montrés dans la Figure 3d), pour différentes valeurs et différents degrés d'anisotropie. En comparaison avec l'estimation par le tenseur de structure (Figure 3b), les résultats semblent plus stables quelque soit le degré d'anisotropie du champ élémentaire.

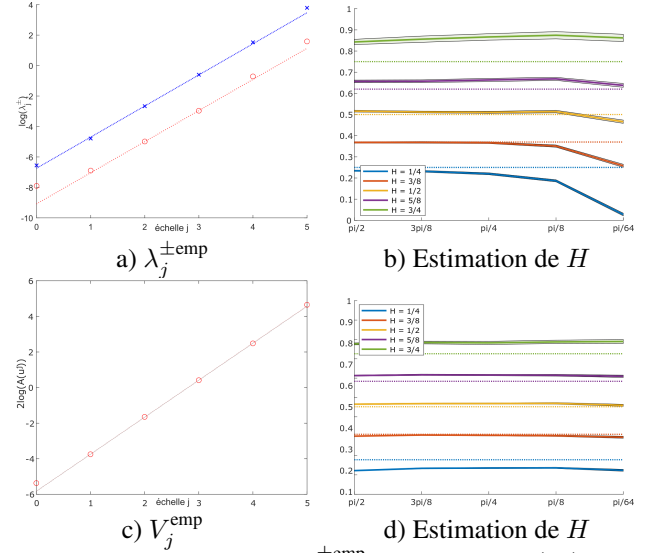


FIGURE 3 : Estimation de  $\lambda_j^{\pm \text{emp}}$  à partir de  $J_X(u_j)$  (a) et de l'amplitude au carré du signal monogène (c). Les droites en pointillés sont obtenues par régression linéaire et donnent respectivement une estimation du paramètre de Hurst  $H$  (b,d).

## 6 Conclusion

Grâce à la représentation monogène multi-échelle de champs élémentaires, nous avons pu définir plusieurs estimateurs des indices de cohérence et de Hurst paramétrant ces champs. À l'aide du tenseur de structure, puis à partir du signal monogène entier, nous avons obtenu des garanties théoriques de convergence pour ces estimateurs et nos simulations numériques montrent qu'il est possible d'approcher les paramètres recherchés à partir d'un ensemble de textures générées par l'un de ces champs aléatoires. Nous envisageons d'étendre ces résultats à la classe plus large des champs fractionnaires anisotropes. Nous aimerions également poursuivre l'étude du comportement asymptotique de ces estimateurs. Obtenir une estimation fiable des degrés d'anisotropie et d'autosimilarité de champs aléatoires est particulièrement important pour pouvoir classifier des textures gaussiennes, une tâche régulièrement utilisée pour certains diagnostics médicaux par exemple.

## Références

- [1] H. BIERMÉ, L. MOISAN et F. RICHARD : A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional brownian fields. *J. Comput. Graph. Statist*, 24(3), 2015.
- [2] M. FELSBERG et G. SOMMER : The monogenic signal. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12), 2001.
- [3] S. Rao JAMMALAMADAKA et A. SENGUPTA : *Topics in circular statistics*, volume 5. WSP Co., 2001.
- [4] S. C. OLHEDE, D. RAMÍREZ et P. J. SCHREIER : Detecting directionality in random fields using the monogenic signal. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 60(10):6491–6510, 2014.
- [5] K. POLISANO : *Modélisation de textures anisotropes par la transformée en ondelettes monogéniques*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, December 2017.
- [6] R. SOULARD et P. CARRÉ : Characterization of color images with multiscale monogenic maxima. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intell.*, 40(10), 2018.