

Licence 1^{ère} année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2
Fiche de TD n°5 : Équations Différentielles

Exercice 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$7y'(x) + 2y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = \cos x + 2 \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Méthode de variation de la constante.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = -(2x - 1)e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^2, x \in]0, +\infty[.$$

3. Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \sin 2x, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3. Recollement de solutions définies sur des intervalles distincts (exercice complémentaire).

1. Utilisant l'exercice 2, donner les solutions de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 2y(x) = x^3,$$

d'une part sur $] -\infty, 0[$, d'autre part sur $]0, +\infty[$. Peut-on trouver des fonctions y dérivables sur \mathbb{R} satisfaisant l'équation sur \mathbb{R} ? Si oui, combien de conditions "initiales" peut-on leur imposer?

2. Mêmes questions pour

$$x^2y'(x) - y(x) = 0.$$

3. Mêmes questions pour

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

4. Étudier

$$(\cos x^2)y'(x) - y(x) = \exp(\tan x),$$

sur les intervalles sur lesquels $\cos x$ ne s'annule pas.

Exercice 4. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

1. Donner les solutions de l'équation

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Méthode : on donnera les solutions de l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière.

2. Donner les solutions de l'équation

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Même question pour

$$y''(x) + 9y(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Même question pour

$$y''(x) + 4y(x) = \tan x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On utilisera la méthode de variation de la constante.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 7y = e^{3x}$

14. $y'' - 3y' - 6y = 7$

2. $y' + y = e^{-4x}$

15. $y'' - 6y' = 8$

3. $y' - 6y = 3x$

16. $y'' = 5$

4. $y' + 9y = 1$

17. $y'' - 3y' + y = x^3 - 2x$

5. $y' - 2y = x^2 + 2x - 1$

18. $y'' + 4y' = 2x + 2$

6. $y' - 4y = x^2$

19. $y'' = e^{2x} - 1$

7. $y' + y = 2 \cos(x)$

20. $y'' - y' - 5y = 0$

8. $y' - 3y = (x + 1)e^{3x}$

21. $y'' - y' - 5y = 3e^x$

9. $y' + 3y = x - e^{3x} + \cos(x/2)$

10. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 2x^2 + x - 1$

22. $y'' - 2y' + 10y = x$

11. $y'' - 4y' + y = 0$

23. $y'' + 2y' = x$

12. $y'' - 2y' + 3y = 0$

24. $y'' - 3y' + 2y = 0$

13. $y'' - 3y' - 6y = 0$

25. $y'' - 2y' + 2y = e^x$