Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $1^{\text{ère}}$ année, 2013-2014, Mathématiques et Calcul 2

**Fiche de TD n°4 : Séries entières**

**Exercice 1.**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{3^n}x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\ln(n))^n x^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^2}x^{2n}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{n!}x^{3n}$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)x^n$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$,
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n^{n/2}x^n$,
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+b^n}x^n \quad (a,b>0)$,
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{n^4}x^n$,

**Exercice 2.**

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}x^n.$$

**Exercice 3.**

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\operatorname{ch}(n)x^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n}$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}n^{(-1)^n}x^n$.

**Exercice 4.**

Développer en série entière les fonctions suivantes, en prenant soin de préciser le rayon de convergence :

1. $x\mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$,
2. $x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$,
3. $x\mapsto \ln(1+x-2x^2)$,
4. $x\mapsto (4+x^2)^{-3/2}$.

**Exercice 5.**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{4n^2-1}$ pour tout $x\in]-1,1[$.
2. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

**Exercice 6.**

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble que l'on précisera :

1. $x\mapsto f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. $x\mapsto g(x)=\operatorname{ch}(\sqrt{x})$ si $x\geq 0$ et $g(x)=\cos(\sqrt{-x})$ si $x<0$.
3. $x\mapsto h(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}$ si $x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $h(0)=0$.

**Exercice 7.**

Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$ (on pourra comparer terme à terme les développements en séries entières des deux fonctions).

**Exercice 8.**

1. Donner le développement en série entière de la fonction arctan, en précisant son rayon de convergence.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n}\frac{1}{2n+1}$.
3. Calculer la primitive de la fonction arctan qui s'annule en 0 et donner son développement en série entière, en précisant son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

**Exercice 9.**

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{2}\right)$, en prenant soin de préciser le rayon de convergence.

**Exercice 10.**

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence sont notés $R$ et $R'$. Montrer que si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \geq 1$ alors $R \geq R'$.