Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence 1re année, Mathématiques et Calcul

# Fiche de TD n° 2 : intégrales convergentes

**Exercice 1.** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec $l \neq 0$, alors son intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge.
2. Prouver que si l'intégrale de $f$ sur $[0, +\infty[$ est convergente et si $f$ admet une limite $l$ quand $x$ tend vers $+\infty$, alors $l = 0$.
3. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, son intégrale sur $[0, +\infty[$ converge-t-elle ?
4. On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que les intégrales de $f$ et de $f'$ sur $[0, +\infty[$ sont convergentes. Montrer que $f$ converge vers 0, quand $x$ tend vers $+\infty$.
   En complément, on admettra qu'il existe des fonctions continues ne tendant pas vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ dont l'intégrale converge.

**Exercice 2.** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3},\quad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt,\quad 3)\ \int_1^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}dt,\quad 4)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{1+t}}dt,\quad 5)\ \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt,$$

$$6)\ \int_1^{+\infty} \frac{(t^5+3t+1)e^{-t}}{t^3+4}dt,\quad 7)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt,\quad 8)\ \int_1^{+\infty} \sin(t^{-2})dt,$$

$$9)\ \int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)dt,\quad 10)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}},\quad 11)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},\quad 12)\ \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt,$$

$$13)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,dt,\quad 14)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\ln t}}{\sin t}dt.$$

**Exercice 3.** Etudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt,\quad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt\quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}dt,\quad 4)\ \int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{t}dt\quad 5)\ \int_0^2 \cos(1/t)dt.$$

**Exercice 4.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que les intégrales suivantes convergent. On pourra distinguer les cas $b > 0$, $b < 0$ et $b = 0$ pour la question 4.

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b},\quad 2)\ \int_0^{+\infty} t^a\left(1-e^{-1/\sqrt{t}}\right)dt,\quad 3)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^2}dt,$$

$$4)\ \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t^b}dt,\quad 5)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}dt,\quad 6)\ \int_0^1 \frac{\ln t}{t^a}dt,\quad 7)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t^a}dt.$$

**Exercice 5.**

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$ converge et calculer sa valeur (effectuer une intégration par parties).
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ converge. On note $A$ sa valeur. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$ converge et vaut $A$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\, dt$ converge. On note $I$ sa valeur. Montrer que $I = 2A$.
4. Montrer finalement que $I = -\pi \ln 2$.

**Exercice 6.**

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$ converge et que $I = \dfrac{\pi^2}{8}$.
2. Soit $n > 1$. Montrer que $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$ converge et que $J_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}$.

**Exercice 7.** Soit $a > 0$. On considère l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(a+t)^2} dt$.

1. Montrer que $I(a)$ converge.
2. Montrer que $I(a) = \dfrac{\ln a}{a}$.

**Exercice 8. Révisions.** Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si pour tout $t \geq 27$, $0 \leq f(t) \leq t^4$, alors l'intégrale de $t \mapsto e^{-t/2} f(t)$ sur $[1, +\infty[$ converge.
2. Soit $F : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une primitive de $f$. On suppose que $F$ est bornée sur $[1, +\infty[$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

**Exercice 9. Compléments.**

1. Généralisation du théorème de la moyenne. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note $m$ le minimum de $g$ sur $[a, b]$ et $M$ son maximum.
   a) Montrer que
   $$m \int_a^b h(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)h(t)\, dt \leq M \int_a^b h(t)\, dt.$$
   b) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b g(t)h(t)\, dt = g(c) \int_a^b h(t)\, dt$.
2. Soit $a > 0$, $b > 0$ et $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.
   a) Montrer que l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge et que $I = f(0) \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
   b) Application : calculer $J := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.