Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Feuille de TD n°1 : intégrales et primitives

Exercice 1 Écrire les suites suivantes sous la forme de sommes de Riemann et calculer leur limite

1. $S_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$, **2.** $S_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$,

3. $S_n = \frac{1}{n}\big(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\big)$, **4.** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$, **5.** $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 2

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs positives ou nulles. Montrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.
2. Soit g continue sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b g(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$.
3. Soit h continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $h(d) = d$.

Exercice 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice complémentaire)
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big).$$

L'inégalité a lieu si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.
Application : Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que $\int_a^b |f(x)|^2dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2dx$.

Exercice 4

1. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt$. Donner les primitives de $\cos^3 t \sin^2 t$ et de $\cos^6 t \sin^3 t$.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt$. Donner les primitives de $\cos^4 t \sin^2\, t$.

Exercice 5 Intégration par parties. Donner les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition **1.** t^2e^{-t}, **2.** $\arctan t$, **3.** $\ln t$, **4.** $e^t\cos t$.

Exercice 6

1. À l'aide du changement de variable $t = \cos u$, calculer $\int_0^{1/2} \sqrt{(1-t^2)}\,dt$.
2. Après avoir donné le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5+4x-x^2}$, donner les primitives de $\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ en précisant leur domaine de définition (mettre $\sqrt{5+4x-x^2}$ sous la forme $\sqrt{1-u^2}$).
3. Mettre $\sqrt{2x^2-3x+2}$ sous la forme $\sqrt{u^2+1}$ et donner les primitives de $\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}$ en précisant leur domaine de définition.

Exercice 7 Fractions rationnelles

1. En précisant leurs intervalles de définition, donner les primitives de $\frac{x}{x^3-3x+2}$ et de $\frac{x^4+4x}{(x^2-1)^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+9}\,dt$.

3. 3.1. Calculer $I(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{2t+2}{t^2+t+\frac{5}{4}}\,dt$.

3.2. Pour $x > -1$, calculer $J(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{3t^2+5t+\frac{13}{4}}{(t+1)(t^2+t+\frac{5}{4})}\,dt.$

3.3. Calculer $K(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{3e^{3t}+5e^{2t}+\frac{13}{4}e^t}{(e^t+1)(e^{2t}+e^t+\frac{5}{4})}\,dt.$

Exercice 8 Effectuant le changement de variable $u = e^t$, calculer les primitives des fonctions

$$\textbf{1. } \frac{e^x+1}{e^{2x}-5e^x+6}, \qquad \textbf{2. } \frac{e^x}{e^{2x}+1}, \qquad \textbf{3. } \frac{2e^x+1}{e^{3x}-e^{2x}-2e^x}.$$

N.B. : même si l'énoncé ne le précise pas, les intervalles de définition doivent être donnés.

Exercice 9 Effectuant le changement de variable $u = e^t$, calculer les primitives des fonctions

$$\textbf{1. } \frac{1}{1+2\,\mathrm{ch}\,x}, \qquad \textbf{2. } \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}, \qquad \textbf{3. } \frac{1}{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x+1}, \qquad \textbf{4. } \frac{1}{1+\mathrm{sh}\,x+2\,chx}.$$

Exercice 10

1. Effectuant le changement de variable indiqué, calculer les primitives des fonctions

$$\textbf{a. } \frac{1}{1+\sin x} \quad (u=\tan\frac{t}{2}), \qquad \textbf{b. } \frac{1}{2\cos x+\sin x+1} \quad (u=\tan\frac{t}{2}),$$
$$\textbf{c. } \frac{1}{\sin x+\sin(2x)} \quad (u=\cos t), \qquad \textbf{d. } \frac{1}{\cos x\,\cos(2x)} \quad (u=\sin t).$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin t\cos t}\,dt$ de trois manières différentes : division par $\cos^2 t$ au numérateur et au dénominateur, changement de variable $u = \tan t$, changement de variable $u = \cos t$.

Exercice 11

1. Montrer que pour tout entier $p \neq 0$, on a

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{p}.$$

2. En déduire la double inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \int_n^{2n} \frac{dx}{x},$$

puis la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$. Donner la limite de $\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

3. Soit $k \geqslant 2$ un entier. En utilisant la même méthode qu'à la question **1.**, montrer que

$$\int_{n+1}^{kn+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leqslant \int_n^{kn} \frac{dx}{x}.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{kn} \frac{1}{p} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \ln k$.

Exercice 12 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{(t^2-1)^n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{(-4)^n}{3^n} + 2n(I_n + I_{n+1})$.

2. Calculer I_2.

Exercice 13 (exercice complémentaire)

1. Mettre $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$ sous la forme d'une somme de Riemann, puis calculer sa limite.

2. Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $|\int_0^1 f(x)dx| = \int_0^1 |f(x)|dx$.

3. Calculer les primitives de $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.