Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2018-2019

Introduction aux probabilités

TD3 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Soit $p \in]0,1[$, et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

1. Quelle loi classique reconnaît-on ?

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = 4 - X$?

3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$ et $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Exercice 2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jours dans la semaine où un incident technique affecte le réseau informatique de l'université Paris Descartes. Sa loi est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X=x)$	$0,1$	$0,05$	$0,2$	$0,15$	$0,2$	?	$0,1$	$0,05$

1. Compléter le tableau en calculant $\mathbb{P}(X=5)$.

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min(X,5)$?

3. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait deux jours sans incident.

Exercice 3. On remplit une matrice 2×2 avec des 0 ou des 1. Chaque entrée est indépendante et vaut 1 avec probabilité $p \in [0,1]$. On note X le déterminant de cette matrice et Y sa trace.

1. Donner la loi de X et de Y.

2. Calculer la probabilité que 0 soit une valeur propre de la matrice.

Exercice 4. On joue n fois à pile ou face (avec une pièce équilibrée). On représente l'expérience par $\Omega = \{0,1\}^n$ (1 pour 'pile', 0 pour 'face'). On note, pour $k \in \{1,..,n\}$, S_k la variable aléatoire égale au nombre de 'pile' lors des k premiers coups.

Dans ce jeu, on gagne 1 quand on fait 'pile' et on perd 1 quand on fait 'face'. On note G_k la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) après les k premiers coups.

1. Donner la loi de S_k.

2. Montrer que $G_k = 2S_k - k$.

3. Montrer que la loi de G_k est

$$P(G_k = h) = \begin{cases} C_k^{\frac{h+k}{2}} 2^{-k} & \text{si } |h| \leq k \text{ et } k+h \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5.

On lance deux dés. Soit X le résultat du premier dé, Y le résultat du second. On note $S = X + Y$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer sa fonction de répartition.

2. Déterminer la loi de S.

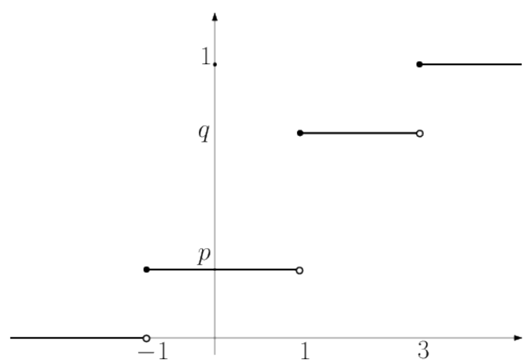
3. Vérifier que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. En déduire la fonction de répartition de M, puis sa loi.

Exercice 6. On lance trois fois de suite un dé non pipé.

1. Quelle est l'espace d'observations Ω et la probabilité associés à cette expérience ?

2. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple $X((1,2,6)) = 3$ et $X((4,4,2)) = 2$). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 7. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est représentée ci-dessous :



1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Donner $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \in]0.5, 3.2])$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 8. On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?
2. On suppose maintenant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouez au jeu précédent ou à celui-ci ? Pourquoi ?

Exercice 9. On lance une fois un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On pose $Y = 2X - 1$ et $Z = X^2$.

1. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?
2. Mêmes questions pour Z.

Exercice 10.

1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = n) = c\frac{2^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de c puis l'espérance de X.
2. Mêmes questions en supposant cette fois que $\mathbb{P}(X = n) = c\frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire successivement une boule, **sans remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.
2. On tire successivement une boule, **avec remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Exercice 12.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où X suit loi géométrique de paramètre p et Y une loi géométrique de paramètre q. Soit M une constante entière.

1. Calculer la loi de $U = \min(X, M)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $V = \min(X, Y)$. En déduire sa loi.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire ayant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que pour tout $n, k > 0$

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k).$$