Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2018-2019

Introduction aux probabilités

TD2 - Probabilité sur un ensemble fini, probabilités conditionnelles & événements indépendants

2018-2019

Exercice 1.

1. Étant donnés 3 événements A, B, C, montrer la formule suivante (en supposant que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > 0$) :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(C|A \cap B).$$

2. On tire trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer trois piques ?

3. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique sachant que les deux dernières le sont ?

Exercice 2. Un étudiant possède 4 cravates C_1,C_2, C_3, C_4. Il en change chaque jour, en en choisissant une au hasard parmi les 3 cravates non portées la veille. Le premier jour, il porte la cravate C_1.

1. Calculer la probabilité pour qu'au jour n, l'étudiant n'ait jamais reporté la cravate C_1.

2. Calculer la probabilité pour qu'au jour n, l'étudiant n'ait jamais porté la cravate C_4.

Exercice 3. Une urne contient deux boules, une blanche et une noire. Après chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée ainsi qu'une autre de même couleur. Quelle est la probabilité de tirer successivement 4 boules noires ?

Exercice 4. J'ai 8 clefs qui se ressemblent toutes ; une seule ouvre mon appartement. En revenant chez moi j'essaie au hasard les clefs une par une. Calculer, dans chacun des cas suivants, la probabilité que j'ouvre ma porte en trois essais au plus :

1. Je suis stupide, et je choisis au hasard une des 8 clefs à chaque essai.

2. Je le suis un peu moins, et je mets de côté les mauvaises clefs au fur et à mesure.

Exercice 5. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, ($0 < p < 1$). Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 6. Deux urnes A et B contiennent respectivement deux boules blanches plus une noire, et une blanche plus cinq noires. On tire au hasard une boule dans l'urne A, que l'on place dans B. On tire alors au hasard une boule dans B :

1. Quelle probabilité a-t-elle d'être blanche ?
2. Si elle s'avère être blanche, quelle est la probabilité que la boule transférée ait été aussi blanche ?

Exercice 7. On suppose qu'un test du cancer a une fiabilité de 95%, sur les malades comme sur les bien portant. On sait que $0,4\%$ de la population souffre de ce cancer.

1. Quelle est la probabilité que le test donne un résultat positif ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test l'indique ?

Exercice 8. Une population est formée de 40% d'hommes et de 60% de femmes. On sait que le pourcentage de fumeurs parmi les hommes est de 50%, et parmi les femmes de 30%. On choisit un individu au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité qu'il soit fumeur ? Quelle est la probabilité qu'il soit un homme sachant qu'il est fumeur ?

Exercice 9. On jette deux dés de façon indépendante et équiprobable. Soient respectivement A, B et C les événements « le chiffre du 1^{er} dé est impair », « le chiffre du $2^{ème}$ dé est pair » et « les chiffres des 2 dés ont même parité ». Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 10. Montrer que si un événement A est indépendant de lui-même, alors $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1, et A est indépendant de tout événement.

Exercice 11. On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et 5 boules blanches (resp. n_2 boules noires et 15 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit N_1 (resp. N_2) l'événement « on a obtenu une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?
2. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ? (on discutera suivant les valeurs de n_1 et n_2)