Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2018-2019

Introduction aux probabilités

TD1 - Modèle probabiliste

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont égaux entre eux ?

- $A = \{n + 4, n \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{n, n = k + 4, k \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{n, n + 4 \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$,
- $E = \{n, n \in \mathbb{N}, n \geq 4\}$,
- $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2. Remplir les espaces avec l'un des symboles $\in$, $\subset$, $=$ lorsque c'est possible :

- $\{3, 5\} \ldots \mathbb{N}$
- $(3, 5) \ldots \{(3, 5)\}$
- $(3, 5) \ldots \{5, 3\}$
- $(3, 5) \ldots \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
- $(3, 5) \ldots (5, 3)$
- $\{3, 5\} \ldots \{5, 3\}$
- $\{3, 5\} \ldots \{4, 5, 3\}$
- $\{3, 5\} \ldots \mathcal{P}(\{4, 5, 3\})$

Exercice 3. A, B, C sont trois événements d'un espace d'épreuves Ω. Exprimer à l'aide de A, B, C, les événements suivants :

1. A, B, C se produisent simultanément.
2. Au moins un des trois événements se produit.
3. Parmi A, B, C, seul C se produit.
4. Aucun des trois événements ne se produit.
5. A ou B se réalisent mais pas ensemble.
6. Un seul de ces trois événements se produit.
7. Deux et pas plus de deux, se produisent.

8. Pas plus de deux se produisent.

Exercice 4. Dans un scrutin où s'affrontent Paul et Virginie, N votes sont émis. L'épreuve consiste à dépouiller le scrutin en ouvrant successivement les N bulletins. Soit A_n, B_n et C_n les événements

- A_n : « quand n bulletins ont été dépouillés, Paul est en tête »
- B_n : « Paul est en tête quand n bulletins ont été dépouillés et reste en tête jusqu'au bout »
- C_n : « Paul passe en tête quand n bulletins ont été dépouillés et reste en tête jusqu'au bout »

1. Donner une relation d'inclusion entre A_n, B_n et C_n.

2. Définir les complémentaires de A_n et B_n. Exprimer B_n en fonction des A_n.

3. Soit $k \geq 1$, inférieur à $N/2$. Caractériser C_{2k}.

4. Exprimer A_N et B_N en fonction des C_n.

Exercice 5. Soit A, B et C trois événements. Montrer l'égalité

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Exercice 6.

1. Soit Ω un ensemble de cardinal fini, et A, B, C trois événements. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2. Dans un groupe de TD de 30 étudiants, 12 étudiants aiment les maths, 14 la physique, 13 la biologie. De plus, 5 étudiants aiment les maths et la physique, 7 aiment la physique et la biologie, et 4 aiment les maths et la biologie. Sachant qu'il y a trois étudiants qui aiment les trois matières, combien d'étudiants n'aiment ni les maths, ni la physique, ni la biologie ?

Exercice 7.

On pipe un dé de sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on le jette soit proportionnel au résultat (il a deux fois plus de chances de tomber sur le 2 que que sur le 1, trois fois plus de chances de tomber sur le 3 que sur le 1, etc). On considère les événements

- A : le résultat est pair
- B : le résultat est un nombre premier

– C : le résultat est un nombre impair

1. Préciser l'espace des épreuves et donner la probabilité de chaque résultat possible.

2. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.

3. Calculer la probabilité des événements suivants :

3.1. on obtient un nombre pair ou un nombre premier ;

3.2. on obtient un nombre premier impair ;

3.3. A mais non B se réalise.

Exercice 8. En étudiant une population, on a remarqué que, durant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre, et $12,5$% sont allés au cinéma et au théâtre. On considère une personne tirée au hasard parmi cette population et on note les événements suivants :

– $C =$« elle est allée au cinéma »,
– $T =$« elle est allée au théâtre ».

Après avoir précisé l'espace des épreuves, calculer la probabilité que cette personne :

1. soit allée au cinéma ou au théâtre.

2. ne soit pas allée au cinéma.

3. ne soit allée ni au cinéma ni au théâtre.

4. soit allée au cinéma mais pas au théâtre.

Exercice 9.

On a mené à Paris une étude sur les trois moyens de locomotion métro, voiture et Vélib. Les conclusions sont les suivantes :

– deux tiers des habitants utilisent parfois le métro pour se déplacer,
– deux tiers utilisent parfois la voiture,
– deux tiers utilisent parfois le Vélib,
– les trois quarts utilisent deux moyens différents,
– personne n'utilise les trois.

Décrire la situation en notant chaque événement en jeu puis dessiner le diagramme ensembliste correspondant. Calculer la probabilité qu'un habitant tiré au hasard utilise un des trois moyens de locomotion cités. En déduire que les conclusions de l'étude sont fausses.

Exercice 10. Alain lance 6 dés et gagne s'il obtient au moins un six ; Béatrice lance 12 dés et gagne si elle obtient au moins 2 six. Qui a le plus de chances de gagner ?

Exercice 11. D'un sac contenant les vingt-six lettres de l'alphabet, on tire successivement cinq lettres avec remise. Quelle est la probabilité de composer un mot comportant

1. 2 A exactement ?

2. au moins 3 A ?

3. 2 voyelles et 1 Z ?

Exercice 12. On tire 5 cartes au hasard parmi un jeu de 32 cartes, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant

1. 2 dames ?

2. au plus 2 dames ?

3. 2 cartes de même couleur ?

Exercice 13. Dix livres sont placés au hasard sur une étagère. Quelle est la probabilité que trois livres donnés soient placés l'un à côté de l'autre ?

Exercice 14.

On jette aléatoirement n boules parmi N cases.

1. Quelle est la probabilité pour que l'on ait m boules dans la première case ?

2. Quelle est la probabilité pour que l'on ait au plus une boule par case ?

Exercice 15. Sur une grille de loto, un joueur coche 5 numéros parmi 49. Quelle est la probabilité que sa grille contienne au moins 3 numéros gagnants ?

Exercice 16. Un partiel de probabilité comporte 4 questions choisies au hasard parmi 60. Un étudiant n'en a étudié que 20. Quelle est la probabilité pour qu'il ait la moyenne à l'épreuve ?

Exercice 17. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément p jetons ($p \leqslant n$) de cette urne.

1. Calculer la probabilité de l'évènement A_k : « le plus grand des numéros tirés est égal à k ».

2. En déduire l'égalité :

$$\binom{n}{p} = \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{i}{p-1}.$$

Exercice 18. Soient A et B deux ensembles disjoints ayant chacun n éléments, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. En comptant de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.